استفاده از چارچوب APOS-Slope برای مطالعه درک مفهوم شیب

سعید حق‌جو
دانشجوی دکتری آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران
ابراهیم ریحانی
دانشیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

چکیده
هدف این پژوهش به کارگیری چارچوب «APOS-Slope» (ناگلی و همکاران، ۲۰۱۹) برای بررسی درک دانش‌آموزان و دانشجویان از مفهوم شیب است. این چارچوب ترکیبی از مؤلفهٔ «APOS» دوبینسکی (۲۰۰۱) و یازده مفهوم مرتبط با شیب توصیف‌شده توسط مور روسو، کنر، و راگ (۲۰۱۱) می‌باشد. برای درک بهتر این چارچوب نمونه‌ای در دسترس، شامل ۷۱ نفر از دانش‌آموزان پایهٔ دهم از مدرسه‌ای خاص در شهر بوشهر و ۲۲ نفر از دانشجویان دانشگاه دولتی شهر تهران در نظر گرفته شد که به سؤالات پرسش‌نامه (۴ سؤال) بر اساس چارچوب APOS-Slope پاسخ دهند. روش تحقیق، ترکیبی از روش کتابخانه‌ای و توصیفی ـ پیمایشی می‌باشد. روایی سؤالات توسط دو نفر از استادان آموزش ریاضی و دو استاد ریاضی تأیید شدند. نتایج تحقیق نشان داد که درک دانش‌آموزان از ده مفهوم مرتبط با شیب تا سطح شیء از لحاظ تابع خطی رسید، ولی درک و فهم هیچ‌کدام از دانشجویان به مرحلهٔ شیء در تابع دو متغیره در حالت سه‌بعدی نرسید. اکثر دانشجویان یازده مفهوم شیب را درک کردند. چگونگی درک دانش‌آموزان و دانشجویان از شیب و مراحل مفهوم‌سازی آن با توجه به چارچوب APOS-Slope، می‌تواند به محققان در پژوهش‌های آینده و به معلمان و استادان در آموزش بهتر مفهوم شیب کمک کند.

کلیدواژه‌ها: شیب، APOS، چارچوب APOS-Slope، تابع خطی

مقدمه و پیشینهٔ تحقیق

مفهوم «شیب» یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات است که در برنامهٔ درسی ریاضی ایران از سال نهم قرار داده شده است. هدف ما در این مطالعه بررسی درک دانش‌آموزان پایهٔ دهم از مفهوم شیب بر اساس چارچوب «APOS-Slope» (ناگل و همکاران، ۲۰۱۹) بود. مؤلفهٔ APOS از چارچوب پیشنهادشده، شرایط بحث دربارهٔ توسعهٔ شناخت درک دانش‌آموزان از شیب را فراهم می‌کند و یازده مفهوم، یک زبان مخصوص شیب را به ارمغان می‌آورند. ترکیب این دو موضوع به ما اجازه می‌دهد تا درک مشاهده‌شدهٔ دانش‌آموزان را طبقه‌بندی و تعیین کنیم که تا چه حد ابزارهای جامع تحقیق و محتوای کلاس درس، با شیب مرتبط هستند. برای معرفی مؤلفهٔ APOS-Slope، ابتدا مؤلفهٔ APOS را معرفی و سپس یازده مفهوم شیب را ارائه می‌کنیم.

نظریهٔ APOS

این نظریه در واقع اقتباسی از ایده‌های **پیاژه** برای مطالعهٔ توسعهٔ دانش ریاضی در افراد از طریق مراحلی شامل «عمل، فرایند، شـــیء و طرحواره»[1] (APOS) اســـت. **دوبینسکی** (۲۰۰۱)، APOS را بر اساس دیدگاه‌های نظری رشدشناختی پیاژه در رابطه با «انتزاع بازتابی» و بازسازی آن در حیطهٔ ریاضیات بنا نهاد. از این نظریه برای مطالعهٔ نحوهٔ ایجاد درک مفهوم دربارهٔ انواع موضوع‌های ریاضی استفاده می‌شود [Arnon, etal., 2014] .

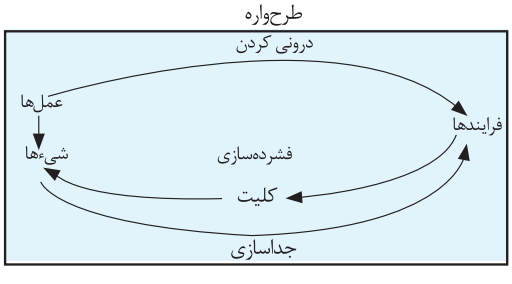
عمل: در APOS، هر عمل، تبدیلِ یک مفهوم ریاضی است که فرد آن را به‌عنوان یک مؤلفهٔ خارجی درک می‌کند.

فرایند: هنگامی که عملی تکرار می‌شود و شخص روی آن بازتاب می‌کند، ممکن است به‌صورت یک فرایند درونی‌سازی شود. فرایند در حال حاضر به‌عنوان یک مؤلفه داخلی درک می‌شود؛ به این معنی که ارتباط معنی‌داری با دانش ریاضی فرد دارد. این ارتباطات فرد را قادر می‌سازند که تبدیل را تصور برخی از گام‌هایش را حذف و نتایج آن را بدون نیاز به اجرای صریح تبدیل، پیش‌بینی کند.

سطوح انتقال بین عمل و فرایند: به کمک تعیین یا حدس زدن سطوح متفاوت در انتقال از یک عمل به مرحلهٔ فرایند، توسعهٔ یک مفهوم ریاضی امکان‌پذیر است. تعداد و مشخصهٔ سطوح انتقال، به مفهوم ریاضی مورد بحث بستگی دارد. به‌طور معمول، آن‌ها را از طریق داده‌های تجربی می‌توان معرفی کرد، اما سطوح انتقال ممکن است هنگام فکر کردن در مورد ساختارهای ذهنی متفاوتی مشخص شود که برای دانش‌آموزان به منظور رسیدن به یک مرحلهٔ فرایند توسعهٔ مفهوم ریاضی لازم است.

برای این مقاله، مفهوم ریاضی، شیب است و ما در نظر داریم سطوح انتقال از مرحلهٔ عمل به مرحلهٔ فرایند را مشخص کنیم. توجه داشته باشید که در APOS، در مورد مراحل «عمل»، «فرایند» و «شیء»، و همچنین، «سطوح بین مراحل» صحبت می‌شود. این با عبارت‌های استفاده‌شده توسط پیاژه سازگار است [پیشین]. یک مرحله نمی‌تواند حذف شود، اما سطح ممکن است چنین نباشد.

شیء: چون محدودهٔ برنامه‌های کاربردی یک فرایند، فراتر از زمینه‌ای است که ابتدا ساخته می‌شود. فرد ممکن است احساس کند به منظور مقابله با موقعیت‌های جدید لازم است عملیات زیادی را در یک فرایند به کار برد. هنگامی که فرد قادر به مشاهدهٔ فرایند به‌عنوان یک هویت است و می‌تواند به کار بردن عملیات یا یک فرایند را تصور کند، می‌توان گفت که فرایند در قالب یک شیء «فشرده»[2] شده است. در حقیقت، مرحلهٔ جدیدی از توسعهٔ بین فرایند و شیء، به نام «کلیت»[3]، پیش‌بینی‌شده است که فرد می‌تواند فرایند را به‌صورت یک هویت ببیند، اما هنوز نمی‌تواند عمل یا یک فرایند را تصور کند. برای مثال، در محاسبهٔ جزءصحیح $[\overline{0,9}]$ اگر کسی ۰ در نظر بگیرد، حد نامتناهی برای آن در سطح کلیت است و اگر ۱ (یک) در نظر بگیرد در سطح شیء است. نمودار ۱، ارتباط بین این مراحل را نشان می‌دهد.



نمودار ۱. نظریهٔ APOS همراه با کلیت (آرنون و همکاران، ۲۰۱۴)

طرحواره یک اصطلاح در روان‌شناسی است و معادل فارسی آن را انگاره یا طرح عنوان کرده‌اند. شبکه‌ای از اندیشه‌ها و روابط به هم‌پیوسته، یا شبکه‌هایی از مفاهیم که در حافظه افراد وجود دارند و آنان را قادر می‌سازد تا اطلاعات تازه را درک و جذب کنند

طرحواره (schema): مجموعهٔ منسجمی از عمل‌ها، فرایندها، شیء‌ها، و سایر **طرحواره‌هایی** است که با یک مفهوم ریاضی خاص مرتبط هستند. اگرچه ممکن است تصور شود که در نظریهٔ APOS یک پیشرفت خطی از عمل به فرایند و به شیء و سپس داشـــتن عمل‌ها، فرایندها و اشیای متفاوتی که در طرحواره سازمان‌دهی شـــده‌اند، وجود دارد، این اغلب به نظر می‌رسد شبیه به پیشرفت منطقی است که در آن تبدیلات جزئی، گذرها و بازگشت‌ها از یک نوع مفهوم به نوع دیگر وجود دارد [پیشین]. (طرحواره یک اصطلاح در روان‌شناسی است و معادل فارسی آن را انگاره یا طرح عنوان کرده‌اند. شبکه‌ای از اندیشه‌ها و روابط به‌هم پیوسته، یا شبکه‌هایی از مفاهیم که در حافظه افراد وجود دارند و آنان را قادر می‌سازد تا اطلاعات تازه را درک و جذب کنند.)

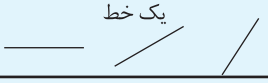
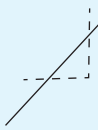
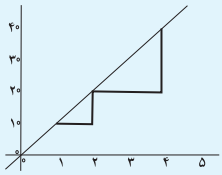
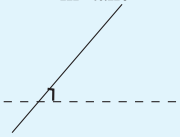
شیب

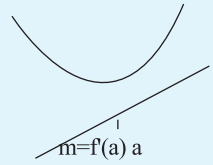
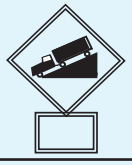
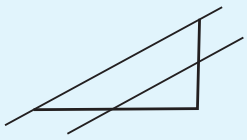
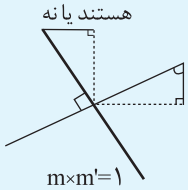
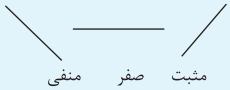
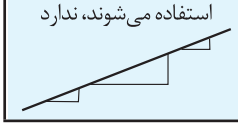
به‌طور رســـمی شیب به دانش‌آموزان کشـــور ایران در کلاس نهم ارائه می‌شود. این یکی از نقاط مهم در برنامهٔ درسی ریاضی دبیرستان اکثر کشورهاســـت. شیب مجدداً در برنامهٔ درسی ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد و با پیشرفت‌های مهمی در جهت

در این مطالعه، از نظریهٔ APOS به‌عنوان لنزی استفاده کردیم تا با در نظر گرفتن ۱۱ مفهوم شیب، بینش بیشتری در مورد یافته‌های مربوط به نحوهٔ درک از شیب ایجاد کنیم

زوایای میل در مثلثات، رگرسیون خطی در آمار، آهنگ تغییر تابعی و تغییر هم‌زمان دو متغیر در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مشتقات در حساب دیفرانسیل و انتگرال، و مشتقات جهتی و جزئی در حساب دیفرانسیل چند متغیره [Martinez-Planell, Trig-veros and McGee, 2017] توسعه می‌یابد. همچنین کلیدی در فهم سایر رشته‌هاست؛ رشته‌هایی مانند سینماتیک، محدوده‌ای از فیزیک که به شدت به استفاده و تفسیر بازنمایی‌های نموداری متکی است. تحقیقات گذشته یازده شیوه‌ای را که افراد شیب را تعریف می‌کنند، گزارش کرده‌اند (جدول ۱). تمام این مفهوم‌ها در برنامهٔ درسی تا پایهٔ دوازدهم در کشور ایران نیز پوشش داده شده است.

جدول ۱. یازده مفهوم دربارهٔ شیب از موری ـ روسو و همکارانش، ۲۰۱۱، با جرح و تعدیل

دسته	توصیف شیب به‌عنوان	مهارت رویه‌ای	درک مفهومی	پاسخ نمونه به شیب برابر است با:
خاصیت فیزیکی (P)	درک کلی از «سراشیبی»[5] یا «کجی»، «درجه»[6] یا «زیر و بمی»[7] یک خط 	به‌طور شهودی سراشیبی یا سرازیری یک خط را نشان می‌دهد	آهنگ تغییر نشان‌دهندهٔ مقدار تغییر متغیر وابسته در هر واحد تغییر متغیر مستقل است	یک عدد که می‌گوید چقدر یک خط سراشیبی دارد. هر چه مقدار قدرمطلق شیب بزرگ‌تر باشد، خط سراشیبی بیشتری دارد
نسبت جبری (A)	مشخص‌شده توسط نسبت نمادین: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ **مثال:** خطی که از (۱،۲) و (۳،۴) می‌گذرد، دارای شیب ۱ است	ـ تفاضل مختصات y برای هر تغییر در y ـ تفاضل مختصات x برای هر تغییر x ـ تفاضل عرض‌ها را برای هر دو نقطه حساب کند. ـ تفاضل طول‌ها را برای هر دو نقطه حساب کند.	ـ تغییرات جهت‌دار است ـ نسبت تغییرات y روی x و x روی y برعکس هستند توضیح: منظور این است که مهم است که عرض نقطهٔ دوم را از عرض اول کم می‌کنیم و در تقسیم تفاضل طول‌ها نیز باید طول نقطهٔ دوم را از اول	تفاضل yها تقسیم بر تفاضل xها برای دو نقطهٔ روی یک خط
نسبت هندسی (G)	مشخص‌شده توسط تعیین میزان صعود (جابه‌جایی عمودی) تقسیم بر حرکت رو به جلو یک خط (جابه‌جایی افقی) 	ـ شمارش واحدهای تغییر عمودی ـ شمارش واحدهای تغییر افقی ـ قرار دادن علامت برای شاخص جهت (بالا و راست مثبت، پایین و چپ منفی)	ـ بالا رفتن و جلو رفتن جهت‌دار هستند ـ نسبت‌های بالا به جلو و جلو به بالا برعکس هستند.	نسبت صعود به بالا به حرکت رو به جلو نمودار یک خط 
ضریب پارامتری (PC)	مشخص‌شده توسط ضریب m در معادلهٔ $y = mx + b$ **مثال:** شیب خط $y=-2x+5$ برابر ۲- است	ـ دستکاری جبری یک معادله به فرم شیب ـ عرض از مبدأ ـ تعیین ضریب m از x	ضریب x اطلاعات متفاوتی وابسته به فرم معادلهٔ خطی معلوم می‌کند	عدد مقابل x، مانند ۴ در $y=4x+6$ $m=4$
خاصیت تابعی (F)	بازنمایی آهنگ تغییر بین متغیرها **مثال:** چقدر یک متغیر نسبت به متغیر دیگر سریع‌تر تغییر می‌کند	جایگزینی کلامی شیب با حروف «آهنگ تغییر»	شیب توصیف‌کنندهٔ تغییر هم‌زمان دو کمیت است	اندازه‌گیری آهنگ تغییر بین دو متغیر مانند کیلومتر بر ساعت
مفهوم مثلثاتی (T)	بازنمایی شیب «زاویهٔ میل»[8] خط (خاصیتی که مرتبط با زاویه‌ای است که خط با یک خط افقی می‌سازد ـ تانژانت زاویهٔ فراز یا فرود یک خط ـ جهت مؤلفه یک بردار) **مثال:** $\tan\theta$ برابر شیب خط واصل بین (۰،۰) و $(\cos\theta,\sin\theta)$ است	ـ محاسبهٔ زاویه یک خط با جهت مثبت محور xها	تانژانت زاویهٔ میل برابر شیب‌خط مماس است	شیب زاویهٔ فراز خط با محور x $m=\tan\theta$ 

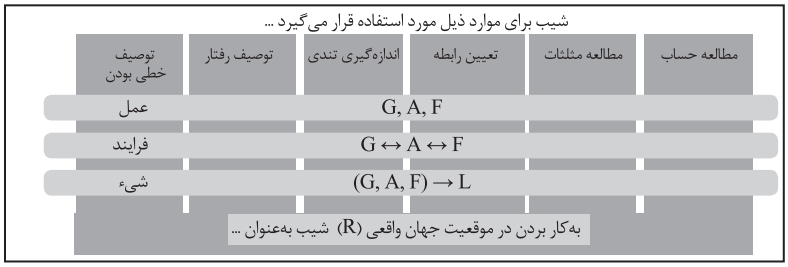
مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال (C)	مرتبط با شیب‌خط منحنی در یک نقطه (حد ـ مشتق ـ اندازهٔ آهنگ تغییر لحظه‌ای برای هر تابع ـ خط مماس بر منحنی در هر نقطه) **مثال:** اگر $y=x^2$، آن‌گاه $2x$ شیب سهمی در هر نقطه x است	محاسبهٔ مشتق در یک نقطهٔ مشخص (طول نقطهٔ تماس)	مشتق به ازای طول نقطهٔ تماس برابر شیب‌خط مماس بر منحنی است	شیب در هر نقطه برای یک نمودار غیرخطی متفاوت است. شیب در هر نقطه برابر با شیب‌خط مماس بر منحنی در آن نقطه است 
موقعیت دنیای واقعی (R)	مرتبط با موقعیت‌های ایستا یا پویا شامل خطوط (موقعیت تابعی مانند رمپ صندلی چرخ‌دار) **مثال:** بلند شدن یا نشستن هواپیما ـ بزرگ‌راه ـ رمپ اسکی	تعیین کمیت دنیای واقعی مربوط به متغیر ورودی و خروجی (با استفاده از هر نوع بازنمایی)	تفسیر تغییرات به‌عنوان متغیر در دنیای واقعی 	برای حل مسائل دنیای واقعی، مانند پیدا کردن ارتفاع زمین از یک سقف یا غلظت مخلوط آب‌پرتقال، استفاده می‌شود 
خاصیت تعیین‌کننده (D)	برای تعیین خطوط موازی یا عمود (خاصیتی که تعیین می‌کند با داشتن یک نقطه روی خط و خاصیت موازی یا عمود بودن می‌توان معادلهٔ خط تعیین کرد)	ـ محاسبهٔ قرینه و معکوس ـ تشخیص اینکه شیب‌های مساوی نشان می‌دهد دو خط موازی‌اند ـ تشخیص اینکه شیب‌های قرینه و معکوس نشان می‌دهند دو خط بر هم عمودند	شیب نشان‌دهندهٔ تعداد نقاط به اشتراک گذاشته‌شده توسط دو رابطهٔ خطی و چگونگی تقاطع آن‌هاست  $m=m'$	یک ویژگی از خطوط است که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و بگوید آیا خطوط موازی (شیب برابر)، عمود بر هم (شیب عکس و قرینه) هستند یا نه  $m\times m'=-1$
شاخص رفتار (B)	شاخصی برای تعیین خط صعودی یا نزولی یا ثابت **مثال:** کدام خط شیب تندتری دارد؟ $y=2x+1$ یا $y=5x-6$	به‌طور شهودی تعیین می‌کند که یک خط صعودی یا نزولی است	ـ یک رابطهٔ صعودی (نزولی) این است که متغیرها در جهت (مخالف جهت) هم تغییر می‌کنند ـ آهنگ تغییر مثبت نشان می‌دهد دو متغیر در یک جهت تغییر می‌کنند	یک عدد که نشان می‌دهد آیا یک خط صعودی است (شیب منفی)، یا افقی (شیب صفر) 
ثابت خطی (L)	یک خاصیت ثابت و یکتا برای شکل‌های «راست یا مستقیم» که مستقل از بازنمایی است	انتخاب هر دو نقطه روی نمودار یا در یک جدول موقعی که چند نقطه داده شده‌اند	شیب مستقل از تعداد نقاط داده شده است، زیرا آهنگ تغییر بین متغیرهای وابسته و مستقل ثابت است	یک مقدار ثابت که بستگی به دو نقطه که برای محاسبهٔ آن استفاده می‌شوند، ندارد 

چارچوب APOS-Slope

ناگل و همکارانش (۲۰۱۹) استدلال می‌کنند که مفهوم شیب به کمک رابطهٔ بین نسبت هندسی (G)، نسبت جبری (A) و خاصیت تابعی (F) ایجاد می‌شود تا زمانی که ثابت خطی (L) شکل گیرد و شیء شیب نشان داده شود. این چهار مفهوم (G، A، F و L) به‌عنوان روش‌های فکر کردن در مورد شیب مطرح هستند.

نظریهٔ APOS در واقع اقتباسی از ایده‌های پیاژه برای مطالعهٔ توسعهٔ دانش ریاضی در افراد از طریق مراحلی شامل «عمل، فرایند، شیء و طرح‌واره» (APOS) است

البته هفت مفهوم دیگر پیشنهادشده را نیز به این شرح (نگاه کنید به جدول ۲) در نظر خواهیم داشت: ضریب پارامتری (PC)، شاخص رفتاری (B)، خاصیت فیزیکی (P)، خاصیت تعیین‌کننده (D)، موقعیت دنیای واقعی (R) و مفهوم مثلثاتی (T) و مفهوم حساب دیفرانسیل (C).



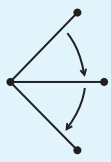
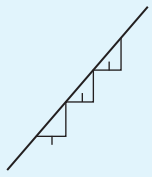
نمودار ۲. رابطه مراحل APOS و یازده مفهوم شیب

روش تحقیق و یافته‌ها

روش تحقیق در این مطالعه توصیفی از نوع پیمایشی بود که ۷۱ نفر از دانش‌آموزان مدرسه‌ای خاص و ۲۲ دانشجوی یک دانشگاه دولتی مورد بررسی قرار گرفتند. سؤالات تحقیق و چند نمونه پاسخ در پیوست آمده‌اند.

روش‌های تفکر در مورد شیب و APOS: ابتدا مفهوم ذکرشده در ردیف‌های نمودار ۲ را در نظر می‌گیریم. مفهوم مرتبط با روش‌های تفکر دربارهٔ شیب به‌عنوان یک عمل، فرایند یا شیء هستند: نسبت جبری (A)، نسبت هندسی (G)، خاصیت تابعی (F) و ثابت خطی (L). در این مطالعه به دنبال پاسخ این سؤال هستیم که «چگونه شیب را بر مبنای APOS می‌توان مفهوم‌سازی و تحلیل کرد؟» جدول ۲ این مراحل را به همراه درصد دانش‌آموزانی که در این سطوح قرار داشتند، نشان می‌دهد. دانشجویان همگی سؤالات ۱ و ۲ را پاسخ دادند، ولی سؤال ۳ را ۴۰ درصد پاسخ دادند و سؤال ۴ را هیچ‌کس پاسخ نداد.

جدول ۲. روش‌های تفکر در مورد شیب (یازده مفهوم) و تحلیل آن با APOS

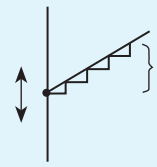
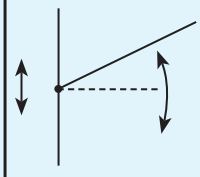
روش‌های تفکر / در مورد شیب APOS	نسبت جبری (٪) (A)	نسبت هندسی (٪) (G)		خاصیت تابعی (٪) (F)	ثابت خطی (٪) (L)
عمل (A)	(٪ ۹۸) (A_A) - $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به‌عنوان فرمول می‌داند - فرمول از ذهن فرد جداست، به طوری که ارجاع هندسی وجود ندارد که امکان توجیه فرمول را فراهم کند	(٪ ۹۰) (A_G) - ΔV مثبت است، هنگامی که خط یا پاره‌خط صعودی است، و منفی است هنگامی که خط نزولی است		(٪ ۷۳) (A_F) - تمایز کلامی شیب با آهنگ تغییر (به اصطلاحات اشاره می‌شود نه مفهوم) - دانش‌آموز شیب را به‌عنوان آهنگ تغییر بین دو متغیر تعریف می‌کند	
سطوح انتقال عمل به فرایند (T)	(٪ ۸۲) (T_A) - توانایی تعمیم نسبت تفاضل یک نقطهٔ ثابت از هر نقطهٔ دیگر روی خط را دارد - ممکن است بتوان فرم‌های متفاوت معادلهٔ یک خط را با استفاده از فرمول به دست آورد $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(٪ ۶۵) (T_G) - توانایی درگیر شدن در تصویر ذهنی پویای مثلث‌های متشابه که در حال حرکت به بالا و پایین یک خط برای ایجاد نسبت‌های مساوی از ΔV به ΔH هستند	(٪ ۴۹) (T_{A-G}) - توانایی استدلال در هر دو سطوح (T_A) و (T_G)، با افزودن اتصال بازنمایی‌ها. برای مثال، ΔV می‌تواند به صورت $y_2 - y_1$ بیان شود		

ادامهٔ جدول ۲

فرایند	درک فرایندی مستقل از بازنمایی است	درک فرایندی مستقل از بازنمایی است	درک فرایندی مستقل از بازنمایی است	-
	ـ نیاز به درکی مستقل از بازنمایی دارد ـ رفتاری مطابق (T_{A-G}) دارد (۲۴٪)			
	ـ استقلال بازنمایی، شامل درک کلامی شیب به‌عنوان آهنگ تغییر، مطابق با مفهوم خاصیت تابعی ـ توانایی تولید تصاویر پویا بدون نیاز به انجام محاسبات صریح ـ آهنگ تغییر به‌عنوان تغییر عمودی به‌عنوان یک تابع از تغییر افقی ـ $\Delta V = m\,\Delta H$ در مورد $y = mx+b$، دانش‌آموز b را به‌عنوان ارتفاع اولیه تشخیص می‌دهد (محل تقاطع با محور عرض‌ها) و mx را به‌عنوان تغییر عمودی در نظر می‌گیرد ـ توانایی محاسبهٔ شیب توابع غیرخطی ـ توانایی استدلال کوواریانسی		
کلیت/شیء	ـ درک مرحلهٔ شیء از شیب، حاصل انجام یا تصور انجام عمل‌هایی در فرایند شیب است (۰٪) ـ دانشجویی که قادر به استفاده از درک فرایند شیب خود برای ساختن یک مفهوم شیب در ابعاد سه بعدی است، رفتاری مطابق با درک مرحلهٔ شیء شیب از خود نشان می‌دهد ـ او قادر به انجام عمل‌هایی روی تصورات فرایند خود از شیب در واحد کیلومتر در ساعت و یا هر ترکیبی از واحدهای مورد نیاز برای یک کاربرد دنیای واقعی (R) است ـ مفهوم ثابت خطی (L) شیب به‌عنوان تفکر شیب و یک ویژگی ثابت منحصربه‌فرد که مستقل از بازنمایی است، تعریف شده است ـ خاصیت ثابت نشان‌دهندهٔ آگاهی از عدم تغییر شیب به هر زوج خاص از نقاط مورد استفاده برای محاسبهٔ آن و تغییر آن در یک کلاس هم‌ارز از خطوط موازی است (مطابق با T_G) ـ خاصیت ثابت با تفکر شیب به‌عنوان آهنگ ثابت تغییر بین مقادیر تغییر هم‌زمان دو متغیر نیز قابل تعریف است (مطابق با T_F) ـ استقلال بازنمایی، حداقل یک سطح تفکر انتقالی T_{A-G} را نشان می‌دهد ـ منحصربه‌فرد بودن بازنمایی همچنین به درک کلامی شیب به‌عنوان آهنگ ثابت تغییر نیاز دارد (مطابق با T_F) و لزوماً به «واحد» آهنگ تغییر محدود نیست ـ تعریف مفهوم ثابت خطی به حداقل یک مرحله فرایند درک شیب نیاز دارد ـ مفهوم ثابت خطی مستلزم در نظر گرفتن شیب به‌عنوان یک فرایند و به‌عنوان یک هویت مستقل است ـ توانایی انجام عمل‌ها در فرایند، چیزی است که شیء را از کلیت متمایز می‌کند			

روش تفکر در مورد شیب (یازده مفهوم) و تحلیل آن با APOS

کاربردهای شیب / APOS	توصیف خطی بودن (ضریب پارامتری، PC) (٪)	توصیف رفتار (شاخص رفتار، B) (٪)	اندازه‌گیری سراشیبی (خاصیت فیزیکی، P) (٪)	تعیین روابط (خاصیت تعیین‌کننده، D) (٪)
عمل (A)	ـ شیب را به‌عنوان عددی در مقابل x در نظر می‌گیرند بدون در نظر گرفتن فرم معادلهٔ خطی که داده شده است ـ به اشتباه گزارش می‌دهند که ضریب x شیب است، حتی زمانی که یک معادلهٔ خطی در فرم استاندارد نوشته شده باشد (۱۰۰٪)	ـ دانش‌آموز محدود به درک درستی از این واقعیت است که خط صعودی دارای شیب مثبت است، خط افقی دارای شیب صفر است و خط نزولی دارای شیب منفی است ـ دانش‌آموز ممکن است قادر به بیان تفاوت بین دو خط متفاوت با شیب‌های مثبت باشد (۹۸٪)	ـ استفاده با مفهوم‌سازی خاصیت فیزیکی شیب ـ دانش‌آموز ممکن است هیچ دانش یا درکی از مفهوم ریاضی شیب نداشته باشد ـ تفسیر دقیق A_A یا A_G از شیب نشان می‌دهد که دو تابع دارای شیب‌های یکسانی هستند. اما تجربیات گذشته (در سیستم مختصات همگن) با استفاده از شیب برای اندازه‌گیری سراشیبی نشان می‌دهد که یک نمودار تندتر است و بنابراین شیب بیشتری نسبت به دیگری دارد (۸۳٪)	از شیب می‌توان برای تعیین روابط استفاده کرد، با آگاهی از این واقعیت که خطوط موازی شیب یکسان دارند و خطوط عمودی دارای شیب‌هایی هستند که شیب‌ها قرینه و معکوس یکدیگرند (۷۵٪)

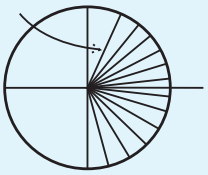
سطوح انتقال عمل به فرایند (T)	T_A: قادر به تشخیص ضریب m مربوط به شیب در هر بازنمایی نمادین داده‌شده از یک خط است T_G: دانش‌آموز ممکن است m را به‌عنوان یک پارامتر به‌صورت هندسی یا نمادین در نظر بگیرد T_{A-G}: تفسیر هندسی پارامتر m T_F: دانش‌آموز ممکن است m را به‌عنوان یک پارامتر نمادین در نظر بگیرد. این به آگاهی نیاز دارد، مبنی بر اینکه m به‌عنوان آهنگ تغییر و سطح انتقال T_F در درک شیب در نظر گرفته شود (۹۲٪)	 T_{A-G}: توانایی توجیه خاصیت و توصیف خواص عددی، نمادین و هندسی، حداقل به یک سطح انتقال T_{A-G} نیاز دارد (۷۵٪)	به‌منظور اندازه‌گیری چنین «سراشیبی» ممکن است فقط نیاز به A_A باشد (استفاده از یک فرمول حفظ‌شده)، اما برای ارتباط آن با یک خاصیت فیزیکی، به نظر می‌رسد به درک هندسی برای تجسم یک هویت فیزیکی متناظر (مانند جاده، نردبان، کوه) نیاز داریم. از این رو، برای اندازه‌گیری و همچنین ارتباط و توجیه خواص عددی و فیزیکی حداقل به سطح انتقال T_{A-G} نیاز داریم (۸۱٪)	توانایی توجیه این خصوصیات (بالا)، حداقل به یک سطح انتقال T_G نیاز دارد (۷۳٪)
فرایند	به‌عنوان یکی از دو پارامتر در $y=mx+b$ در نظر بگیرد و b را به‌عنوان ارتفاع اولیه و m را به‌عنوان شیب در یک روش پویا درک کند (۵۹٪)	(۵۶٪)	اندازه‌گیری سراشیبی نشان می‌دهد که یک نمودار تندتر است و بنابراین شیب بیشتری نسبت به دیگری دارد (۶۰٪)	
کلیت/شیء		-	ـ دانش‌آموز ممکن است به انجام عمل‌هایی در یک فرایند شیب به‌منظور درک ایده‌های فیزیکی، مانند درجهٔ میل یک جاده نیاز داشته باشد ـ اندازه‌گیری شیب، هنگام مواجهه با نمودارهای خطوط در سیستم مختصات غیرهمگن (۵٪)	
طرح‌واره			عمل مقایسهٔ اختلاف بین یک خط و شیب آن را در طرح‌وارهٔ هندسهٔ تحلیلی با تابع خطی انجام می‌دهیم و آهنگ تغییر آن را در یک طرح‌واره از توابع محاسبه می‌کنیم (۰٪)	

نتایج پژوهش و پیشنهادها

در این مطالعه، از نظریهٔ APOS به‌عنوان لنزی استفاده کردیم تا با در نظر گرفتن یازده مفهوم شیب، بینش بیشتری در مورد یافته‌های مربوط به نحوهٔ درک از شیب ایجاد کنیم. نتایج نشان می‌دهند که دانش‌آموزان به مرحلهٔ شیء از شیب در حد تابع خطی رسیدند (ده مفهوم)، ولی در بیان تفسیر کاربرد واقعی آن اغلب آن‌ها ضعف داشتند. در سایر مفهوم مشکل چندانی مشاهده نشد. به‌نظر می‌رسد کتاب‌های درسی در ایران به خوبی مفهوم شیب را ارائه کرده‌اند. دانشجویان برای درک یازده مفهوم شیب در حد تابع

خطی تا مرحلهٔ شیء مشکلی نداشتند، ولی در زمینهٔ درک سه‌بعدی شیب مشکلات بسیاری داشتند؛ به‌طوری که شاید حتی چنین مسائلی ندیده بودند. درک دانشجویان از شیب در حالت سه‌بعدی در مرحلهٔ کلیت قرار داشت.

این پژوهش می‌تواند به محققان، معلمان و استادان کمک کند تا چگونگی مفهوم‌سازی شیب را تحلیل کنند؛ همچنین می‌توانند برای آموزش در کلاس درس نیز از آن استفاده کنند. این چارچوب بینش بیشتری در مورد یافته‌های اخیر **نیوتن** (۲۰۱۸)، مبنی بر اینکه مشکلات معلمان در استفاده از شیب به‌عنوان یک معیار (خاصیت فیزیکی)، با ضعف در توصیف آهنگ تغییر (خاصیت تابعی) همراه است و معلمان را به حداکثر یک سطح انتقال از استدلال شیب محدود می‌کند فراهم کند. این یافته‌ها به آن‌ها کمک می‌کند

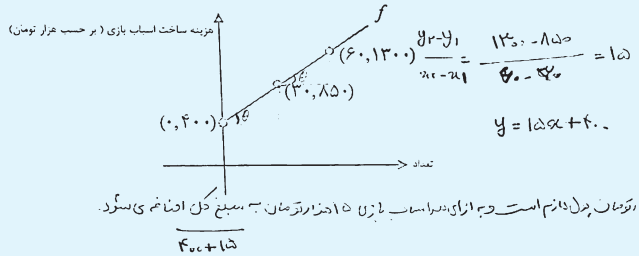
کاربردهای شیب / APOS	مطالعهٔ مثلثات (مفهوم مثلثات، T) (٪)	مطالعهٔ حساب (مفهوم حساب C) (٪)	به کار بردن در موقعیت‌های دنیای واقعی (موقعیت دنیای واقعی، R) (٪)
عمل (A)	ـ بهره‌گیری از اصطلاح «زاویه» ـ تانژانت زاویهٔ حاده مثلث برابر اندازهٔ ضلع مقابل روی ضلع مجاور (۹۱٪)	مشتق یک تابع در یک نقطهٔ معین، شیب خط مماس تابع در نقطهٔ داده شده است (ـ)	کپی کردن یا تقلید از مراحل راهبردی راه حل مطرح‌شده (۶۴٪)
سطوح انتقال عمل به فرایند (T)	دانش‌آموزان قادر به ایجاد یک تصویر پویا هستند که در آن می‌توانند ببینند که تانژانت به سمت بی‌نهایت افزایش می‌یابد، زمانی که زاویه از ۰ به ۹۰ افزایش پیدا می‌کند (۶۹٪)	(ـ)	مسائل دنیای واقعی که فقط شامل یک مفهوم از شیب هستند، مانند مسائل فیزیکی که ممکن است در دو بعد با یک تابع خطی مدل‌سازی شوند، ممکن است فقط به یک سطح انتقال T_{A-G} نیاز داشته باشند (۵۲٪)
فرایند	(۵۱٪) 	دانش‌آموز به درک فرایند شیب نیاز دارد تا قادر به در نظر گرفتن مشتق در یک نقطه به‌عنوان آهنگ لحظه‌ای تغییر باشد (ـ)	مسائل دنیای واقعی با طبیعت پویا، شامل مفهوم شیب به‌عنوان آهنگ تغییرند، چون آن‌ها نیازمند فرایند شیب هستند (یادآوری این معادل با مرحلهٔ فرایند درک خاصیت تابعی شیب است) (۳۹٪)
کلیت/شیء	اگر دانش‌آموز قادر به استفاده از تصاویر پویا برای رسم نمودار تابع مماس یا تغییرات تابع تانژانت باشد، عمل را در فرایند هندسی و عددی در T_{A-G} انجام خواهد داد. او می‌تواند رفتاری مطابق با مرحلهٔ شیء توسعهٔ شیب نشان دهد (۲۲٪)	ـ در هر نقطه از نمودار f، دانش‌آموز دارای تصویر پویایی از نزدیک شدن خطوط قاطع به خط مماس در نقطهٔ مزبور است (فرایند شیب) و شیب خطوط مماس تابع f ، متناظر با مقادیر f' حرکت می‌کند (ـ)	T_{A-G} و مراحل فرایند مرتبط هستند با آنچه **استامپ** (۲۰۰۱) به‌عنوان کاربرد فیزیکی (ایستا) و تابعی (پویا) کاربردهای دنیای واقعی شیب معرفی می‌کند. می‌توان انتظار داشت که برخی از مسائل دنیای واقعی در زمینه‌ای که برای دانشجو جدید است، تنظیم شوند. در این مورد راهبرد حل ممکن است به انجام عمل در یک فرایند شیب نیاز داشته باشد. در این مورد مرحلهٔ شیء از شیب مورد نیاز است (۵٪)
طرح‌واره	استفاده از شیب برای مطالعهٔ مثلثات ممکن است به‌عنوان رشد در طرح‌وارهٔ شیب دیده شود، زیرا هنگام یادگیری مثلثات، دانش‌آموزان به هماهنگ کردن فرایندها در طرح‌واره شیب و مثلثات نیاز دارند (۵٪)	عمل روی یک فرایند شیب برای درک هندسی مشتقات جزئی، صفحات مماس، مشتقات جهت‌دار و دیفرانسیل کامل مورد نیاز است (ـ)	(۰٪)

طرح‌واره: مجموعهٔ منسجمی از عمل‌ها، فرایندها، شیءها، و سایر طرح‌واره‌هایی است که با یک مفهوم ریاضی خاص مرتبط هستند

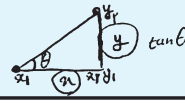
به دقت تشخیص دهند فرد در کدام مرحله از درک شیب قرار دارد یا در طراحی مواد آموزشی، تدوین مجدد ایده‌های آموزشی دربارهٔ شیب را برای حرکت به سمت مراحل پیشرفته تسهیل کنند.

الف) نمونهٔ پاسخ

الف) برای شکل زیر یک معادله خط بنویسید و نمودار داده شده را تفسیر کنید.



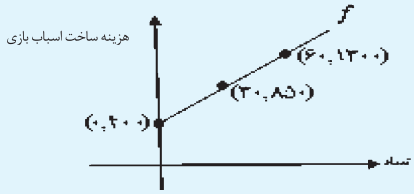
ب) تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها را بیابید و تفسیر کنید(مختص پایه دهم و بالاتر).



سؤالات پرسشنامه

سؤال ۱: معادله خطی بنویسید که از نقطه $(-۳,۴)$ بگذرد و با خط $5x-2y=-3$ موازی باشد.

سؤال ۲: الف) برای شکل زیر یک معادله خط بنویسید و نمودار داده شده را تفسیر کنید.



ب) تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها را بیابید و عدد آن را تفسیر کنید.

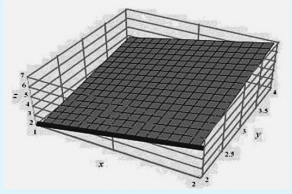
پ) $f'(۴۰)$ را محاسبه و رابطه آن با شیب خط و تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها بیان و تفسیر کنید. (مختص دانشجویان)

سؤال ۳: صفحه زیر را در نظر بگیرید. الف) شیب در جهت‌های x و y یعنی (m_1, m_2) را پیدا کنید.

ب) تغییرات عمودی کل (Δz) را برای $\Delta x=۲$ ، $\Delta y=۵$ محاسبه کنید.

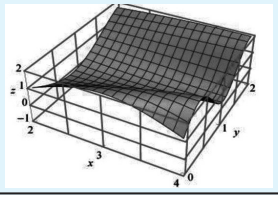
ج) معادله صفحه را بنویسید. (راهنمایی: $z-z_0=m_1(x-x_0)+m_2(y-y_0)$)

د) اگر صفحه زیر، صفحه مماس بر نمودار تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $(۱,۲,۲)$ باشد. دیفرانسیل تابع در نقطه $(۱,۲)$ را در صورت امکان به دست آورید. $df(۱,۲)=?$



(مختص دانشجویان)

سؤال ۴: با توجه به نمودار زیر، علامت $\frac{\partial f}{\partial y}(۴,۰/۷)$ $D_{<-۲,۱>}f(۴,۰)$ را مشخص کنید.



(مختص دانشجویان)

هنگامی که فرد قادر به مشاهدهٔ فرایند به‌عنوان یک هویت است و می‌تواند به کار بردن عملیات یا یک فرایند را تصور کند، می‌توان گفت که فرایند در قالب یک شیء «فشرده» شده است

تجزیه و تحلیل پاسخ‌ها آزمون بر اساس APOS-Slope

سؤال ۱: معادله خطی بنویسید که از نقطه $(-۳,۴)$ بگذرد و با خط $۵x-۲y=-۳$ موازی باشد.

حل: ضریب پارامتری $۵x-۲y=-۳ \Rightarrow m=\frac{۵}{۲}$

خاصیت تعیین‌کنندگی(موازی یا عمود) $m=m'=\frac{۵}{۲}$

نوشتن معادله خط $y+۳=\frac{۵}{۲}(x-۴) \Rightarrow y=\frac{۵}{۲}x-۱۳$

ب) تغییرات عمودی کل (Δz) را برای $\Delta x=۴\ ,\ \Delta y=۵$ محاسبه کنید.

(نسبت جبری در فضای سه بعدی) $\Delta z=m_x\Delta x+m_y\Delta y=۳\Delta x+\Delta y=۱۲+۵=۱۷$

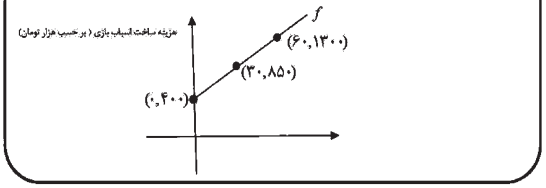
ج) معادله صفحه را بنویسید. (راهنمایی: $z-z_۰=m_x(x-x_۰)+m_y(y-y_۰)$)

(نوشتن معادله) $z-z_۰=m_x(x-x_۰)+m_y(y-y_۰) \Rightarrow z-۲=۳(x-۱)+m_y(y-۲)$

د) اگر صفحه زیر، صفحه مماس بر نمودار تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $(۱,۲,۲)$ باشد، دیفرانسیل تابع در نقطه $(۱,۲)$را درصورت‌امکان به‌دست آورید. $df(۱,۲)=?$

(مفهوم حساب دیفرانسیلی و ضریب پارامتری) $df(x,y)=m_xdx+m_ydy \Rightarrow df(۱,۲)=۳dx+۱dy$

سؤال ۲: الف) برای شکل زیر یک معادله خط بنویسید و نمودار داده شده را تفسیر کنید.



حل الف: نسبت جبری- ثابت خطی $m=\frac{۸۵۰-۴۰۰}{۳۰-۰}=\frac{۱۳۰۰-۸۵۰}{۶۰-۳۰}=\frac{۱۳۰۰-۴۰۰}{۶۰-۰}=۱۵$

ضریب پارامتری- نوشتن معادله خط $y=۱۵x+۴۰۰$

تفسیر: نمودار تغییرات هزینه ساخت اسباب بازی را نسبت به تعداد آن نشان می‌دهد(**خاصیت تابعی**)- هزینه ساخت با افزایش تعداد، به طور ثابت در حال افزایش است(**خاصیت رفتاری**)- به ازای افزایش هر واحد کالا،۱۵ هزار تومان به هزینه ساخت اسباب بازی اضافه می‌شود(**موقعیت دنیای واقعی- نسبت هندسی- خاصیت فیزیکی**)- هزینه ساخت اسباب بازی در شروع تولید، ۴۰۰ هزار تومان است(**نسبت هندسی**).

ب) تأثرات زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها را بیابید و تفسیر کنید(مختص پایه دهم و بالاتر).

حل: $\tan\theta=\frac{۸۵۰-۴۰۰}{۳۰-۰}=\frac{۱۳۰۰-۸۵۰}{۶۰-۳۰}=\frac{۱۳۰۰-۴۰۰}{۶۰-۰}=۱۵$

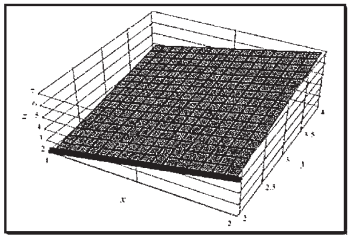
$\tan\theta$ همان شیب خط است(مفهوم مثلثاتی- نسبت جبری-ثابت خطی).

ب) $f'(۲۰)$ را محاسبه و ارتباط آن با شیب و تأثرات زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها بیان و تفسیر کنید(مختص پایه دوازدهم).

حل: $f'(۲۰)=۱۵=m=\tan\theta$ یعنی با افزایش یک واحد به تعداد تولید، ۱۵ هزار تومان برای ساخت اسباب بازی هزینه اضافه می‌شود (مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال- ثابت خطی-مفهوم مثلثاتی).

سؤال ۳: صفحه زیر را در نظر بگیرید. الف) شیب در جهت‌های x و y یعنی (m_x,m_y) را پیدا کنید.

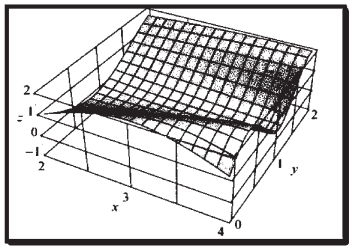
(نسبت هندسی در فضای سه بعدی) $m_x=۳\ ,\ m_y=۱$



سؤال ۴: با توجه به نمودار زیر، علامت $\frac{\partial f}{\partial y}(۴,۰/۷)$ و $D_{\langle -۲,۱\rangle}f(۴,۰)$ را مشخص کنید.

$\frac{\partial f}{\partial y}(۴,۰/۷)<۰$ زیرا با افزایش y، z کاهش می‌یابد. (خاصیت رفتاری و خاصیت فیزیکی)

$D_{\langle -۲,۱\rangle}f(۴,۰)>۰$ زیرا با افزایش در جهت بردار $\langle -۲,۱\rangle$، مقدار f افزایش می‌یابد.



منابع

1. Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., et al. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer Verlag.
2. Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research: An ICMI study. In D. Holton (Ed.). The teaching and learning of mathematics at university level (pp. 275–282). Dordrecht: Springer.
3. Martínez-Planell, R., Trigueros, M., & McGee, D. (2017). Studentsí understanding of the relation between tangent plane and directional derivatives of functions of two variables. The Journal of Mathematical Behavior, Vol. 46, 13–41.
4. Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015). Shape thinking and students' graphing activity. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.).
5. Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction.Educational Studies in Mathematics, 76(1), 3–21.
6. Nagle, C., Martínez-Planell, R., & Moore-Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. The Journal of Mathematical Behavior.C. Reid (2006), from zero to infinity what makes number intresting, Ak peters, Ltd, wellesley, Massachusetts.
7. Newton, X. A. (2018). Undergraduate stem majors' understanding of slope. Improving teacher knowledge in K-12 schooling. Cham, Switzerland: Palgrave Macmillan75–100

پی‌نوشت‌ها

1. Action, Process, Object and Schema 2. encapsulated 3.Totality4. steepness 5. slant 6. grade 7. pitch 8. inclination